زابونیان در دریای مدیترانه .... ۲۰ امتیاز

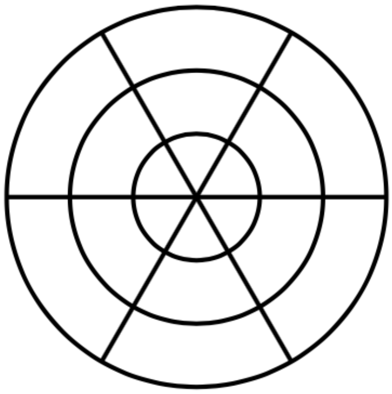
کاروان ۱۳۹۸ نفره‌ی **زابونیان** در حال عبور از دریای مدیترانه بودند که در جزیره‌ی آدم‌خوارها گیر افتادند. رئیس قبیله‌ی آدم‌خوارها روش عجیبی برای محاکمه‌ی این ۱۳۹۸ نفر طراحی کرد. او به هر یک از ۱۳۹۸ نفر گفت: «از بین ۱۳۹۷ نفر دیگر، نام دو نفر متمایز را روی یک کاغذ بنویسید و به من تحویل دهید.»

به یک نفر از کاروان، **سربه‌زیر** گوییم، اگر نامش دقیقاً یک بار روی کاغذها نوشته شده باشد. به فردی از کاروان که نامش بیش از یک بار روی کاغذها نوشته شده باشد، **رسوا** گوییم. به یک نفر از کاروان **رسواگر** گوییم، اگر نام حداقل یک فرد رسوا را روی کاغذش نوشته باشد.

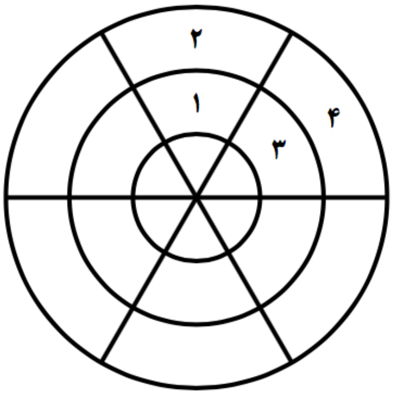
رئیس قبلیه، تمام افراد سربه‌زیر و رسواگر را برای تهیه‌ی شام قبیله خواهد کشت و بقیه را آزاد خواهد کرد. حداکثر چند نفر از کاروان زابونیان جان سالم به در خواهند برد؟

دیرالسلطان .... ۲۰ امتیاز

دیرالسلطان شکلی است که از سه دایره‌ی هم‌مرکز و n قطاع تشکیل شده است ($n \geq ۳$). برای مثال شکل زیر، یک دیرالسلطان به ازای $n = ۶$ است:



به این ترتیب، یک دیرالسلطان $۳n$ خانه دارد. دو خانه از یک دیرالسلطان را **مجاور** گوییم، اگر بیش از یک نقطه‌ی مرزی مشترک داشته باشند. برای مثال در شکل زیر، خانه‌ی ۱ با خانه‌های ۲ و ۳ مجاور است، ولی با خانه‌ی ۴ مجاور نیست:



آبولف و **ایلیچ** در حال بازی بر روی یک دیرالسلطان به ازای $n = ۱۳۹۸$ هستند. در هر مرحله آبولف یک قطاع را انتخاب می‌کند، طوری که آن قطاع حداقل یک خانه‌ی رنگ نشده داشته باشد؛ سپس ایلیچ یکی از خانه‌های رنگ نشده از قطاع را انتخاب می‌کند و آن خانه رنگ زده می‌شود. در مراحل زوج، خانه‌ی انتخاب شده را آبی و در مراحل فرد، خانه‌ی انتخاب شده را قرمز می‌کنیم. پس از آن که تمام خانه‌ها رنگ زده شد، بازی خاتمه می‌یابد.

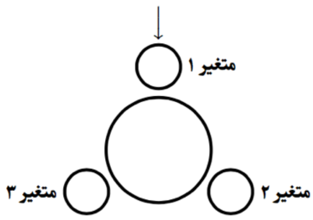
در انتها به ازای هر دو خانه‌ی مجاور ناهم‌رنگ، ایلیچ باید یک واحد به آبولف پول بدهد. اگر هر دو نفر به روش بهینه بازی کنند، ایلیچ چه مقدار پول خواهد داد؟

زبان چرخشی .... ۲۰ امتیاز

در این سوال با یک زبان برنامه‌نویسی جدید سر و کار دارید. ابتدا توضیحات زیر را در مورد بخش‌های مختلف زبان بخوانید:

حافظه و اشاره‌گر:

این زبان تنها از سه خانه‌ی حافظه با شماره‌های ۱ تا ۳ استفاده می‌کند که به شکل زیر، دور یک دایره قرار گرفته‌اند و هر کدام از آن‌ها می‌توانند یک عدد صحیح را ذخیره کنند. به این خانه‌ها متغیر نیز می‌گوییم. یک اشاره‌گر (که در شکل با فلش مشخص شده) هم وجود دارد که در هر لحظه به یکی از سه متغیر اشاره می‌کند و در هنگام شروع برنامه، روی متغیر شماره ۱ است. در هر لحظه از برنامه، به متغیری که اشاره‌گر به آن اشاره می‌کند، متغیر **درگیر** می‌گوییم. برنامه دارای تعدادی دستور است که پس از اجرای هر یک، اشاره‌گر یک واحد در جهت ساعت‌گرد حرکت می‌کند تا به متغیر بعدی اشاره کند.



زیربرنامه‌ها:

هر برنامه در این زبان از تعدادی زیربرنامه تشکیل می‌شود. فرض کنید زیربرنامه‌های یک برنامه به ترتیب $C_۱$ تا C_k باشند. به ازای هر $۱ \le i \le k - ۱$ زیربرنامه‌ی بعدی C_i را $C_{i+۱}$ در نظر می‌گیریم. زیربرنامه‌ی بعدی C_k را نیز $C_۱$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین به ازای هر $۲ \le i \le k$ زیربرنامه‌ی قبلی C_i را $C_{i-۱}$ در نظر می‌گیریم. زیربرنامه‌ی قبلی $C_۱$ را نیز C_k در نظر می‌گیریم.

هر زیربرنامه تعدادی خط دارد که در هر خط یک دستور نوشته شده است. به ازای هر دستور، منظور از دستور بعدی، دستور واقع در خط بعد زیربرنامه است. به ازای دستور آخر زیربرنامه نیز، دستور بعدی را دستور واقع در خط یکم زیربرنامه در نظر می‌گیریم.

اجرای برنامه از خط اول زیربرنامه‌ی $C_۱$ آغاز می‌شود.

دستورها:

دستورهای مجاز به صورت زیر هستند:

- **افزایش**: این دستور را با کلمه‌ی INC نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، به عدد متغیر درگیر یک واحد اضافه کرده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **کاهش**: این دستور را با کلمه‌ی DEC نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، از عدد متغیر درگیر یک واحد کم کرده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **پرش**: این دستور را با کلمه‌ی JMP نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **خروج**: این دستور را با کلمه‌ی EXT نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، اگر مقدار متغیر درگیر برابر صفر باشد، اجرای برنامه خاتمه می‌یابد؛ در غیر این صورت، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **حرکت به جلو**: این دستور را با کلمه‌ی NXT نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، اگر مقدار متغیر درگیر برابر صفر باشد، به خط اول زیربرنامه‌ی بعدی می‌رویم؛ در غیر این صورت، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.
- **حرکت به عقب**: این دستور را با کلمه‌ی PRV نشان می‌دهیم. به هنگام اجرای این دستور، اگر مقدار متغیر درگیر برابر صفر باشد، به خط اول زیربرنامه‌ی قبلی می‌رویم؛ در غیر این صورت، کار خاصی انجام نشده و به دستور بعدی در زیربرنامه می‌رویم.

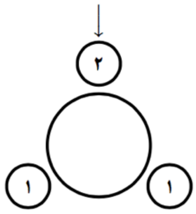
یادآوری می‌کنیم پس از اجرای هر یک از دستورات بالا، اشاره‌گر یک واحد در جهت ساعت‌گرد حرکت می‌کند.

حال می‌خواهیم یک برنامه برای شما مثال بزنیم که دو زیربرنامه به صورت زیر دارد:

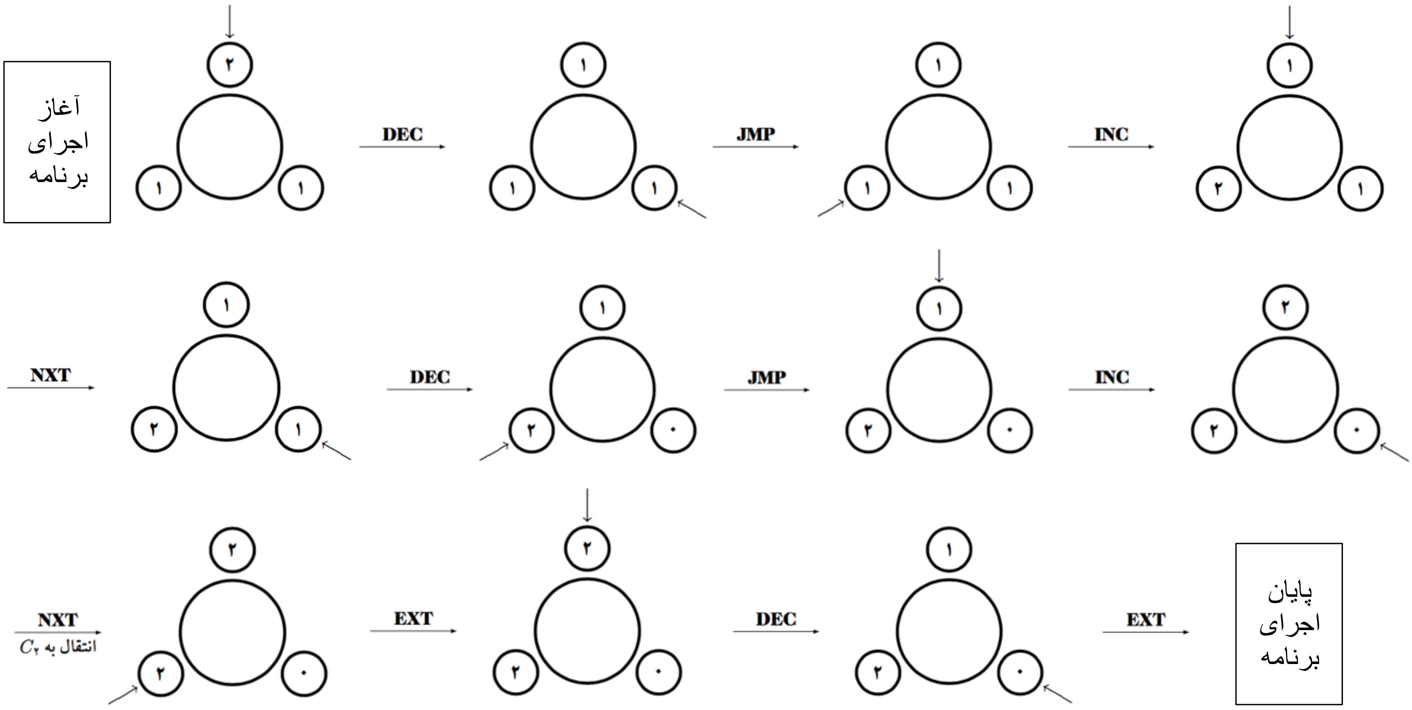
$C_{۱}$:
DEC
JMP
INC
NXT

$C_{۲}$:
EXT
DEC

فرض کنید در ابتدا مقادیر متغیرها به شکل زیر باشد:



در شکل زیر، مقدار متغیرها و موقعیت اشاره‌گر در حین روند اجرای برنامه به صورت مرحله به مرحله تا خاتمه‌ی آن آمده است:



پس در انتهای برنامه مقدار متغیرها به ترتیب ۱، ۰ و ۲ خواهد بود.

حال شما برای هر یک از قسمت‌های زیر، با زبان گفته شده یک برنامه متشکل از تعدادی زیربرنامه بنویسید. زیربرنامه‌های خود را با گذاشتن نام‌های $C_{۱}$، $C_{۲}$ و ... مشخص کنید و در هر زیربرنامه، دستورات را به صورت منظم و به ترتیب بنویسید. برای درستی برنامه‌ی خود اثباتی مختصر نیز بنویسید. تنها کسانی نمره‌ی کامل می‌گیرند که هر دوی برنامه و اثبات را به درستی نوشته باشند.

آ) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر دو عدد طبیعی A و B، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب A، B و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۳ برابر $A+B$ شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۲ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

ب) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر دو عدد طبیعی A و B، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب A، B و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۳ برابر $\max(A,B)$ شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۲ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

پ) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر دو عدد طبیعی A و B، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب A، B و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۳ برابر ب.م.م دو عدد A و B شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۲ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

ت) برنامه‌ای بنویسید که به ازای هر عدد طبیعی N، اگر مقدار متغیرهای ۱، ۲ و ۳ در ابتدا به ترتیب N، صفر و صفر باشد، پس از اجرای برنامه، مقدار متغیر ۲ برابر $N \times N$ شود (مهم نیست مقادیر متغیرهای ۱ و ۳ در انتها چه باشد). (۵ امتیاز)

باغچه‌ی آفت‌زده‌ی آبولف .... ۲۰ امتیاز

باغچه‌ی **آبولف** به صورت یک جدول ۱۳۹۸ در ۱۳۹۸ است. به مجموعه‌ای از ۱۳۹۸ خانه‌ی جدول **سلطانی** گوییم، اگر هیچ دو تا از آن‌ها هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند. خانه‌ی واقع در سطر iاُم و ستون jاُم را با (i,j) نشان می‌دهیم.

در ابتدا، در تمام خانه‌های (i,j) که $i < j$ است، آفتی قرار دارد. **دگرگون** کردن یک خانه به معنی تغییر وضعیت آفت داشتن یا نداشتن آن است؛ به عبارت دیگر اگر خانه‌ای آفت داشته باشد، پس از دگرگون کردن آفت نخواهد داشت و بالعکس. آبولف می‌خواهد با آفت‌ها مبارزه کند. او دستگاهی خریده است که در هر مرحله می‌تواند مجموعه‌ای سلطانی از جدول انتخاب کند و تمام خانه‌های آن را دگرگون کند. پس از تعداد دل‌خواهی مرحله استفاده از دستگاه، کمینه‌ی تعداد آفت‌هایی که آبولف در باغچه‌اش خواهد داشت چیست؟